1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS

1.1. Definiciones básicas

Definiciones

- Un **grafo** es un par $G = (V, A)$ donde V es un conjunto finito no vacío y A es una familia finita de pares no ordenados de elementos de V. Los elementos de V se llaman **vértices**, y los de A **aristas** o **arcos**.
- Si $u, v \in V$ son dos vértices y $a = \{u, v\} \in A$ es una arista, que se notará por $a = uv$, se dice que a **une los vértices** u y v o que u y v son **extremos** de a.
- Una arista $a = uu$ se llama **bucle**, y una arista que aparece repetida en A se llama **arista múltiple**.
- Un grafo sin bucles ni aristas múltiples se llama **grafo simple**.
- Dos vértices son **adyacentes** si los une una arista, y dos aristas son **adyacentes** si tienen un extremo común.
- Un vértice y una arista son **incidentes** si el vértice es extremo de la arista.
- Un vértice es **aislado** si no tiene vértices adyacentes.
- Un grafo $G' = (V', A')$ es **subgrafo** del grafo $G = (V, A)$ si $V' \subset V$ y $A' \subset A$.

Matriz de adyacencia
La **matriz de adyacencia** de un grafo $G = (V, A)$ con n vértices, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, es la matriz $M(G) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ donde a_{ij} es el número de aristas que unen v_i con v_j.
La matriz de adyacencia de un grafo es siempre simétrica.

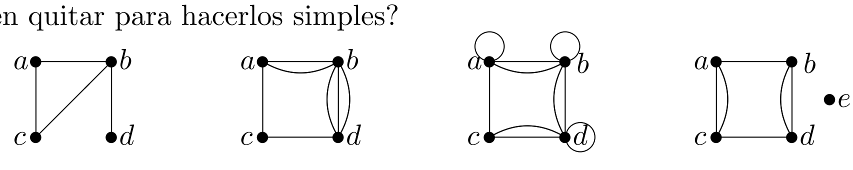
Grado de un vértice
Dado un grafo $G = (V, A)$, se llama **grado** del vértice $v \in V$ al número de aristas que lo tienen como extremo (cada bucle se cuenta, por tanto, dos veces), y se designa por $d(v)$.

Grafos isomorfos
Dos **grafos** $G = (V, A)$ y $G' = (V', A')$ son **isomorfos** si existe una biyección $f : V \longrightarrow V'$ que conserva la adyacencia, es decir, que para cualesquiera $u, v \in V$, el número de aristas que unen u y v coincide con el número de aristas que unen $f(u)$ y $f(v)$.
Dos grafos isomorfos tienen el mismo número de vértices y de aristas.

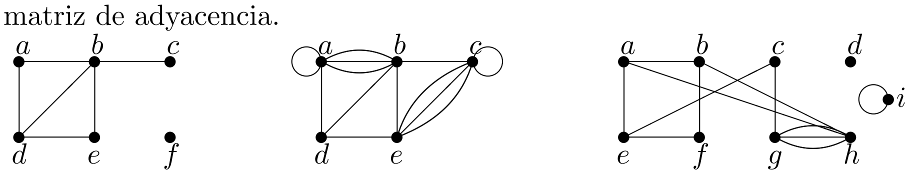
Ejercicios

1. Dibuja un grafo que represente las rutas aéreas diarias de una compañía que ofrece los siguientes vuelos diarios: cuatro vuelos que unen Boston y Nueva York, dos entre Nueva York y Miami, uno entre Miami y Madrid, cuatro entre Madrid y Barcelona, uno entre Barcelona y Boston, uno entre Madrid y Nueva York y uno entre Barcelona y Nueva York.

2. ¿Cuáles de los siguientes grafos son simples? Para los grafos no simples, ¿cuál es el menor número de aristas que se deben quitar para hacerlos simples?



3. Para cada uno de los siguientes grafos, encuentra el número de vértices, el número de aristas, el grado de cada vértice y la matriz de adyacencia.



4. Diseña una red con cinco ordenadores de forma que sigan conectados los cinco aunque se rompan dos conexiones cualesquiera. (No usar más conexiones de las necesarias).

5. Demuestra que en toda reunión de seis personas, o bien hay tres que se conocen mutuamente o bien hay tres que son mutuamente desconocidas.

6. Demuestra que en toda reunión con n personas, $n > 1$, hay al menos dos con el mismo número de conocidos entre ellos.

7. (La fiesta de April, Biggs) El profesor McBrain y su mujer April dan una fiesta en la que hay otros cuatro matrimonios. Algunas parejas se dan la mano al saludarse, pero nadie da la mano a su pareja. Al acabar la fiesta, el profesor McBrain pregunta a cada uno de los asistentes a cuánta gente ha dado la mano, y recibe 9 respuestas diferentes. ¿A cuántos invitados ha dado la mano April?

Soluciones y/o sugerencia a los ejercicios

1. Cada ciudad se representa por un vértice, y cada vuelo por una arista.

2. El único grafo simple es el primero. Para convertir en simples los restantes hay que quitar al menos 3, 6 y 2 aristas, respectivamente.

3. Se cuentan los vértices y aristas de cada uno de ellos, y se construye la matriz $M = (a_{ij})$, donde a_{ij} es el número de aristas que unen los vértices v_i y v_j.

4. Cada ordenador debe estar conectado a más de dos.

5. La situación se puede representar mediante un grafo con seis vértices y aristas que unen cada dos vértices y que serán azules o rojas según que las personas unidas se conozcan o no, respectivamente. Razona a partir del número de aristas de cada color que parten de uno de los vértices.

6. Considera un grafo con vértices en las personas y aristas entre las personas conocidas. Analiza los posibles grados de los vértices.

7. Las parejas se pueden identificar construyendo el grafo de saludos a partir de las respuestas recibidas (empezando por el mayor número de saludos y en orden decreciente).

1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS

1.2. Sucesiones de grados

Definiciones

Sea $G = (V, A)$ un grafo con n vértices: $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Se llama **sucesión de grados** del grafo G a la sucesión $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, con $d_i = d(v_i)$, formada por los grados de todos sus vértices.
Cualquier permutación entre los elementos de una sucesión de grados equivale a una permutación entre los vértices, lo que no altera el grafo, que sería isomorfo al original.
Una sucesión de enteros no negativos se llama **sucesión gráfica** si es la sucesión de grados de un grafo simple.

Propiedades

1. **Teorema de Euler**: En un grafo $G = (V, A)$ la suma de los grados de todos los vértices es el doble del número de aristas, es decir,
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|A|$$
2. En cualquier grafo el número de vértices con grado impar es un número par.
3. Si la sucesión $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ es gráfica, entonces: $\sum_{i=1}^{n} d_i$ es par.
4. En cualquier sucesión gráfica, el valor máximo debe ser menor que el número de sus términos.
5. Para grafos simples, se tiene que la sucesión no creciente $(s, d_1, \ldots, d_s, e_1, \ldots, e_r)$ es gráfica si y sólo si la sucesión $(d_1 - 1, \ldots, d_s - 1, e_1, \ldots, e_r)$ es gráfica.
6. Dos grafos isomorfos tienen, salvo permutaciones, la misma sucesión de grados.
Sin embargo, dos grafos pueden tener, salvo permutaciones, la misma sucesión de grados y no ser isomorfos.

Algoritmo de caracterización de sucesiones gráficas

Para comprobar si una sucesión no creciente es gráfica se comprueba, inicialmente, que verifica que la suma de todos sus elementos es par y que el mayor de ellos es menor que su longitud. Una vez comprobado esto, se aplica reiteradamente el proceso:

$$(s, d_1, \ldots, d_s, e_1, \ldots, e_r) \longrightarrow\!\!\longrightarrow\!\!\longrightarrow (d_1 - 1, \ldots, d_s - 1, e_1, \ldots, e_r)$$

previa ordenación (si es necesario) en orden decreciente de sus términos, hasta que se obtiene algún número negativo, y la sucesión no es gráfica, o se alcanza una sucesión de ceros, y la sucesión es gráfica.
Cuando se obtiene que la sucesión es gráfica, para obtener un grafo simple con dicha sucesión de grados se realiza el proceso a la inversa, partiendo de un grafo con la última sucesión de grados y añadiendo vértices y aristas para verificar cada una de las sucesiones intermedias.

Ejercicios

1. Un grafo simple tiene la siguiente sucesión de grados: (4, 3, 3, 2, 2). ¿Cuántas aristas tiene el grafo? Dibújalo.
2. Estudia si son gráficas las siguientes sucesiones de grados: **(a)** (3, 3, 3, 3, 2); **(b)** (1, 2, 3, 4, 5);
(c) (1, 2, 3, 4, 4); **(d)** (3, 4, 3, 4, 3); **(e)** (0, 1, 2, 2, 3); **(f)** (1, 1, 1, 1, 1).
3. **(a)** ¿Cuál es el máximo número de vértices que puede tener un grafo con 25 aristas si cada vértice tiene grado mayor o igual que 4?
(b) ¿Cuál es el menor número de vértices que puede tener un grafo simple con 52 aristas?

Soluciones y/o sugerencia a los ejercicios

1. 7 aristas.

2. Son gráficas (a) y (e), y el resto no lo son.

3. **(a)** 12. **(b)** 11.